# Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

## Wykład 6

## **Przestrzenie Hilberta**

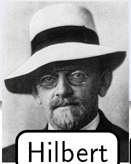
math.uwb.edu.pl/∼zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

# Iloczyn skalarny

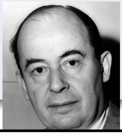
**Def. Przestrzenią unitarną** (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową $H$ nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**, czyli funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{F}$ spełniającą

1. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ oraz $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$ (*dodatnio-określoność*)
2. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, (*liniowość w 1-argumencie*)
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (*antysymetria*)

dla $x,\ y,\ z \in H$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.



Hilbert



von Neumann

**Uw.** Warunki (2) i (3), implikują

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle \qquad (\textit{antyliniowość w 2-argumencie})$$

Zatem iloczyn skalarny jest **formą półtoraliniową!**

Jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to (3) przyjmuje postać $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. Zatem *rzeczywisty iloczyn skalarny jest funkcją* **dwuliniową symetryczną**!

**Prz1.** Wzór $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni skończenie wymiarowej $H = \mathbb{F}^n$.

**Prz2.** Wzór $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni ciągów sumowalnych w kwadracie $H = \ell^2$.

**Prz3.** Wzór $\langle x, y\rangle = \int_\Omega x(t) \cdot \overline{y(t)}\, d\mu$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni funkcji całkowalnych w kwadracie $H = L^2(\mu)$.

**Uw.** Nierówność Höldera dla $p = q = 2$, czyli

$$\int_\Omega |x(t)y(t)|\, d\mu \leqslant \|x\|_2 \cdot \|y\|_2,$$

zwana również **nierównością Schwartza**, gwarantuje że iloczyn skalarny na $L^2(\mu)$ jest poprawnie określony: $x, y \in L^2(\mu) \Rightarrow x \cdot \overline{y} \in L^1(\mu)$. Zauważmy, że

$$\|x\|_2 = \left(\int_\Omega |x(t)|^2\, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

**Def. Normę** elementu $x$ w przestrzeni unitarnej $H$ definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

**Lem.** $\underbrace{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2}_{\text{“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”}}$ dla $x, y \in H$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

**Tw. (Nierówność Schwartza)**

Dla dowolnych wektorów $x, y$ przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

**Dowód:** Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y\rangle| = \lambda \cdot \langle x, y\rangle$ oraz $|\lambda| = 1$ ($\lambda = e^{-i \arg\langle x,y\rangle}$). Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle t\lambda x + y, t\lambda x + y\rangle &= \|t\lambda x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle t\lambda x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &= t^2\|x\|^2 + 2t|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Zatem funkcja $f(t) := t^2\|x\|^2 + 2t|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2$ jest nieujemna.

Czyli jej wyróżnik jest niedodatni: $\Delta = 4|\langle x, y\rangle|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$.

Po przekształceniach daje to $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. ■

**Wn.** Funkcja $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

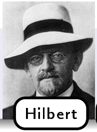
**Dowód:** $\|x\| = 0 \iff \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

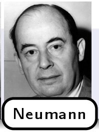
$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle x, x\rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \overset{\operatorname{Re} z \leqslant |z|}{\leqslant} \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2$$
$$\overset{\textit{Schwartz}}{\leqslant} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Pierwiastkując otrzymujemy nierówność trójkąta. ■



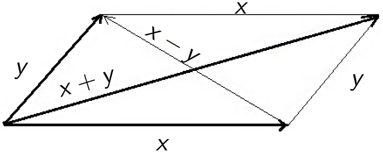




**Def. Przestrzeń Hilberta** = przestrzeń unitarna, która jest zupełna w normie $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

**Uw.** Iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{F}$ jest funkcją ciągłą w normie, którą zadaje (wynika to z nierówności Schwartza). W szczególności, przedłóża się on do uzupełnienia przestrzeni $H$. Zatem

**uzupełnienie przestrzeni unitarnej jest przestrzenią Hilberta!**

**Tożsamość równoległoboku** mówi, że *suma kwadratów długości boków w równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości przekątnych*




## Twierdzenie.

W każdej przestrzeni unitarnej zachodzi **tożsamość równoległoboku**:

$$\forall_{x,y\in H} \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

oraz iloczyn skalarny jest jednoznacznie wyznaczony przez normę **wzorem polaryzacyjnym**:

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2, & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Na odwrót, jeśli $(H, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną, w której spełniona jest tożsamość równoległoboku, to wzór polaryzacyjny zadaje iloczyn skalarny na $H$ taki, że $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, czyli $H$ jest unitarna.

**Dowód:** '$\Longrightarrow$' '$\Longleftarrow$' dla bardziej ambitnych.

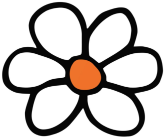
**Wn.** Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

**Prz.** Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geqslant 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą $(\Omega, \Sigma, \mu)$, jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y\rangle = \int x \cdot \overline{y}\, d\mu$. Załóżmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2\mu(A\cup B)^{\frac{2}{p}},$$

$$2\left(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2\right) = 2\left(\mu(A)^{\frac{2}{p}} + \mu(B)^{\frac{2}{p}}\right).$$



Dzieląc obustronnie mamy $1 = \left(\frac{\mu(A)}{\mu(A\cup B)}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\frac{\mu(B)}{\mu(A\cup B)}\right)^{\frac{2}{p}}$. Czyli kładąc $\lambda_1 := \frac{\mu(A)}{\mu(A\cup B)}$ oraz $\lambda_2 := \frac{\mu(B)}{\mu(A\cup B)}$ dostajemy liczby takie, że

$$0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 = (\lambda_1)^{\frac{2}{p}} + (\lambda_2)^{\frac{2}{p}}.$$

Te relacje mogą zachodzić tylko wtedy, gdy $p = 2$, gdyż jeśli $p > 2$ to $\lambda_i > (\lambda_i)^{\frac{2}{p}}$, a jeśli $p < 2$ to $\lambda_i < (\lambda_i)^{\frac{2}{p}}$ dla $i = 1, 2$.